TABĂRA JUDEȚEANĂ-CONCURS,
pentru elevii olimpici la matematică, ediția a XIII-a 2023,
Târgu Lăpuș, 26.08.2023-01.09.2023
Clasa a IX-a

1. Fie x un număr real. Arătați că x este număr întreg dacă și numai dacă relația $[x]+[2x]+[3x]+...+[nx]=\frac{n([x]+[nx])}{2}$ are loc pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$. Prin $[a]$ s-a notat partea întreagă a numărului real a.

2. **a.** Fie $a,b\geq 0$ și $x,y>0$. Arătați că $\frac{a^3}{x^2}+\frac{b^3}{y^2}\geq\frac{(a+b)^3}{(x+y)^2}$.

b. Fie $a,b,c\geq 0$ și $x,y,z>0$ astfel încât $a+b+c=x+y+z$. Arătați că:

$$\frac{a^3}{x^2}+\frac{b^3}{y^2}+\frac{c^3}{z^2}\geq a+b+c\ .$$

3. Se consideră paralelogramul *ABCD* şi punctele $M\in(AB), N\in(AC)$ astfel încât $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AN}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$. Exprimaţi vectorii $\overrightarrow{DM}$, $\overrightarrow{DN}$ în funcţie de vectorii $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ şi $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ şi demonstraţi că punctele *D, N, M* sunt coliniare.

Notă: Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7.
Timp de lucru: 2 ore

TABĂRA JUDEȚEANĂ_CONCURS,
pentru elevii olimpici la matematică, ediția a XIII-a 2023,
Târgu Lăpuș, 26.08.2023-01.09.2023
Clasa a IX-a
BAREM

1. Fie x un număr real. Arătați că x este număr întreg dacă și numai dacă relația $[x]+[2x]+[3x]+...+[nx]=\frac{n([x]+[nx])}{2}$ are loc pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$. Prin $[a]$ s-a notat partea întreagă a numărului real a.

Soluție: Dacă $x\in\mathbb{Z}$, relația rezultă imediat, deoarece $[kx]=k[x]$, pentru orice $k\in\mathbb{N}^*$. **1p**

Pentru demonstrarea reciprocei, observăm că ipoteza implică
$n([x]+[nx])+2[(n+1)x]=(n+1)([x]+[(n+1)x])$. **3p**

Notând $t=\{x\}\Rightarrow(n-1)[(n+1)t]=n[nt]$. **1p**

În cazul $t\neq 0$, alegând $n>1$ astfel încât $\frac{1}{n+1}\leq t<\frac{1}{n}$, obținem contradicția $n-1=0$, deci presupunerea $t\neq 0$ este falsă. **2p**

2. a. Fie $a,b\geq 0$ și $x,y>0$. Arătați că $\frac{a^3}{x^2}+\frac{b^3}{y^2}\geq\frac{(a+b)^3}{(x+y)^2}$.

b. Fie $a,b,c\geq 0$ și $x,y,z>0$ astfel încât $a+b+c=x+y+z$. Arătați că :

$$\frac{a^3}{x^2}+\frac{b^3}{y^2}+\frac{c^3}{z^2}\geq a+b+c$$

Soluție:

a. Inegalitatea este echivalentă cu $(x^2+2xy+y^2)\left(\frac{a^3}{x^2}+\frac{b^3}{y^2}\right)\geq a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$\Leftrightarrow\frac{x^2b^3}{y^2}+2\frac{a^3y}{x}+2\frac{b^3x}{y}+\frac{a^3y^2}{x^2}\geq 3a^2b+3ab^2$. **1p**

Observăm că $\frac{x^2b^3}{y^2}+2\frac{a^3y}{x}=\frac{x^2b^3}{y^2}+\frac{a^3y}{x}+\frac{a^3y}{x}\geq 3\sqrt[3]{b^3a^6}=3a^2b$.

Analog $2\frac{b^3x}{y}+\frac{a^3y^2}{x^2}\geq 3ab^2$ și prin adunare, obținem inegalitatea cerută. **4p**

b. Folosind inegalitatea precedentă, avem :
$\frac{a^3}{x^2}+\frac{b^3}{y^2}+\frac{c^3}{z^2}\geq\frac{(a+b)^3}{(x+y)^2}+\frac{c^3}{z^2}\geq\frac{(a+b+c)^3}{(x+y+z)^2}=a+b+c$. **2p**

3. Se consideră paralelogramul $ABCD$ şi punctele $M \in (AB), N \in (AC)$ astfel încât $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$. Exprimaţi vectorii $\overrightarrow{DM}$, $\overrightarrow{DN}$ în funcţie de vectorii $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ şi $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ şi demonstraţi că punctele D, N, M sunt coliniare.

Soluție:

$\overrightarrow{DN} = \frac{1}{4}\vec{a} - \frac{3}{4}\vec{b}$, $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{3}\vec{a} - \vec{b}$, ... **4p**

$\overrightarrow{DN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DM} \Rightarrow$ D, N, M coliniare **3p**